
振動子・パラメータ抽出仕様

2008/3/10 第 1.0 版

ファイン MEMS システム化設計プラットフォーム

研究開発プロジェクト

はじめに

本文書では、MEMS 等価回路 Web ライブラリに掲載されたデバイスのうち、「振動子」の等価回路の回路定数を計算する際に必要なパラメータの抽出仕様について概説する。

更新履歴表

版名	改訂日付	主要改訂内容
第 1.0 版	2008.3.10	初版

目次

1	振動子	3
1.1	入力パラメータ値の制限	3
1.2	抽出対象パラメータ	4
1.3	パラメータ抽出方法	5
1.3.1	バネ定数	5
1.3.2	実効質量	6
1.3.3	直流動作点における振動子-電極間の容量	7
1.3.4	直流動作点での振動子の z 方向撓み	11
1.3.5	浮遊容量	12
1.3.6	基板-電極間の容量 / 基板-振動子間の容量	12

1 振動子

本節では、台形断面を有するシリコンナノ振動子のパラメータ抽出方法を示す。

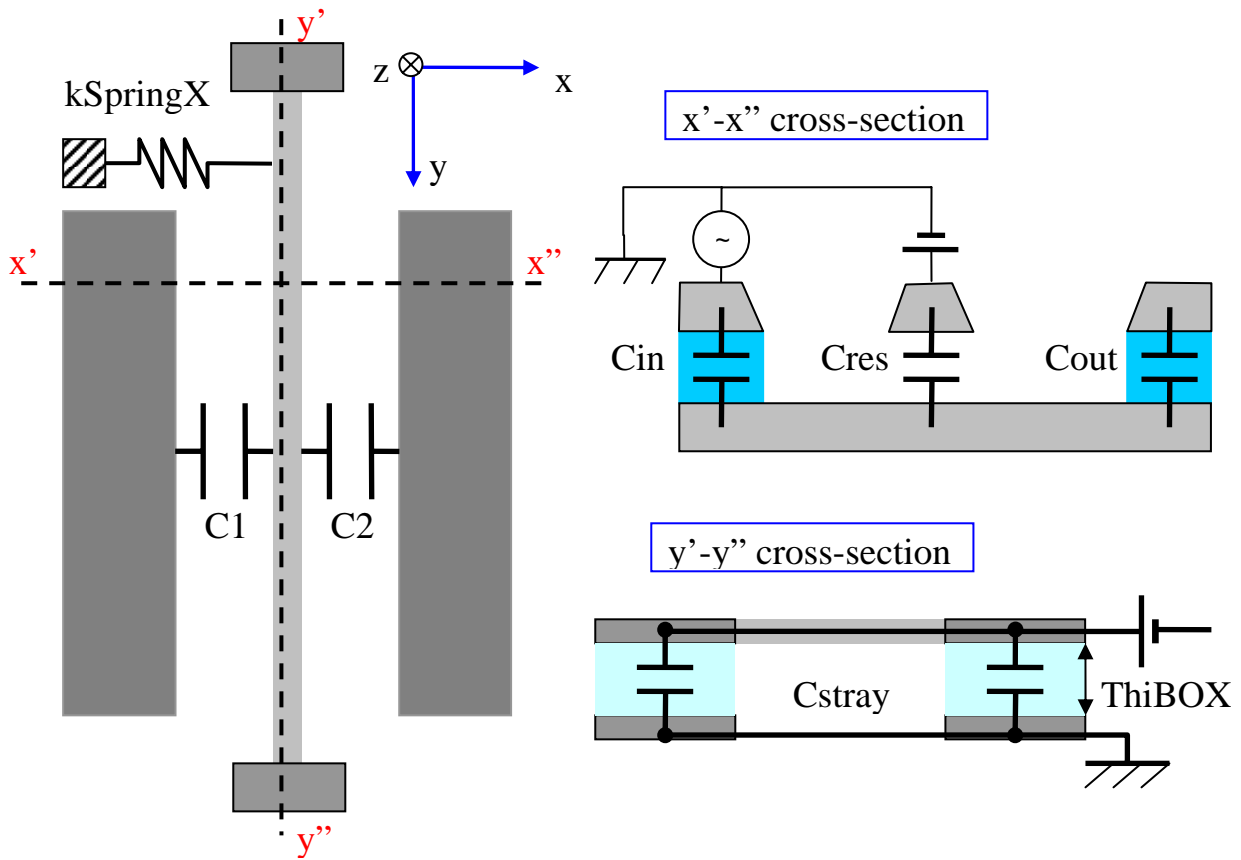


図 1 振動子

1.1 入力パラメータ値の制限

- 振動子の側面角 Angle :
 $0 < \text{Angle} \leq 90$
- 振動子の幅と厚みの比 : 以下の条件を満たす W_r , ThiR の値を指定してください (この条件を満たさない場合、振動子の断面が三角形で、幅 W_r と側面角 Angle によって決まる厚みと、厚み Thi の入力値が整合しません)

$$\frac{W_r}{\text{ThiR}} \geq \frac{2}{\tan(\text{Angle})}$$

1.2 抽出対象パラメータ

パラメータ名	記号	単位	補足
実効質量	massX	kg	
	massZ	kg	
バネ定数	kSpringX	N/m	
	kSpringZ	N/m	
基板-電極間の容量	Cin	F	
	Cout	F	
基板-振動子間の容量	Cres	F	
振動子接続電極の浮遊容量	Cstray	F	
直流動作点における振動子のたわみ	Z0	m	
直流動作点における振動子-電極間の容量	C1	F	
	C2	F	
直流動作点における振動子-電極容量の1階微分値	C1dx	F/m	$\equiv \partial C_1 / \partial x _{x=z=0}$
	C2dx	F/m	$\equiv \partial C_2 / \partial x _{x=z=0}$
	C1dz	F/m	$\equiv \partial C_1 / \partial z _{x=z=0}$
	C2dz	F/m	$\equiv \partial C_2 / \partial z _{x=z=0}$
直流動作点における振動子-電極容量の2階微分値	C1dx2	F/m ²	$\equiv \partial^2 C_1 / \partial x^2 _{x=z=0}$
	C2dx2	F/m ²	$\equiv \partial^2 C_2 / \partial x^2 _{x=z=0}$
	C1dz2	F/m ²	$\equiv \partial^2 C_1 / \partial z^2 _{x=z=0}$
	C2dz2	F/m ²	$\equiv \partial^2 C_2 / \partial z^2 _{x=z=0}$
	C1dxdz	F/m ²	$\equiv \partial^2 C_1 / \partial x \partial z _{x=z=0}$
	C2dxdz	F/m ²	$\equiv \partial^2 C_2 / \partial x \partial z _{x=z=0}$

1.3 パラメータ抽出方法

1.3.1 バネ定数

一様荷重を加えた両持ち梁(図 2)のバネ定数の解析式を用いる。軸方向に張力 N 、長さ l_c の部分に一様荷重 q_0 が働く両持ち梁のバネ定数は¹、

$$k_{eff} = \frac{q_0 l_c}{y_{max}} = \frac{-8\kappa^2 l \lambda_r N \cosh(\kappa l / 4)}{\{8 + \kappa^2 l^2 (\lambda_r - 2) \lambda_r\} \cosh(\kappa l / 4) - 8 \cosh(\kappa l (1 - 2\lambda_r) / 4) + 4\kappa l \lambda_r \sinh(\kappa l / 4)} \quad (1-1)$$

と表せる。

ここで、

$$\text{軸方向の張力 } N = \frac{\pi^2 EA}{4l^2} y_{max}^2 \quad (A \text{ は断面積、} E \text{ は Young 率。残留応力は無視した}) \quad (1-2)$$

$$\text{荷重をかける部分の割合 } \lambda = l_c / l \quad (1-3)$$

$$\text{パラメータ } \kappa = \sqrt{\frac{N}{EI}} \quad (EI \text{ は曲げ剛性}) \quad (1-4)$$

である。尚、式(1-1)に現れるたわみ y_{max} の計算方法については 1.3.4 節を参照してください。

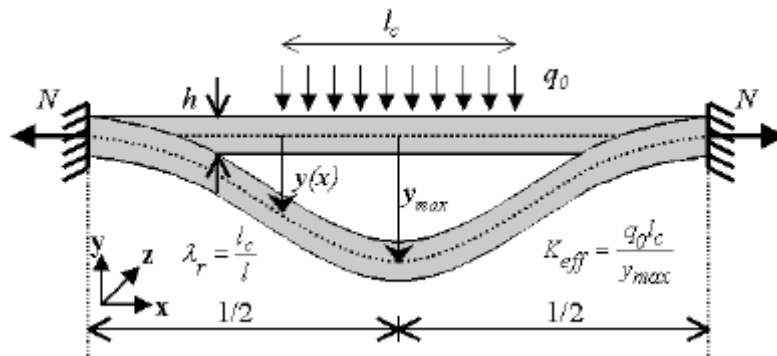


図 2 部分的に一様荷重を加えた両持ち梁

¹ S. Pamidighantam, R. Puers, K. Baert and H. A. C. Tilmans, "Pull-in voltage analysis of electrostatically actuated beam structures with fixed-fixed and fixed-free end conditions", *J. Micromech. Microeng.* vol.12 pp.458-464, 2002.

【参考】軸方向の張力が微小な場合

ここで、式(1-1)の右辺を Taylor 展開して κl の 2 次までとると、

$$k_{eff} = \frac{384EI}{l^3(2.5 - 1.5\lambda_r)} \left(1 + \frac{\kappa^2 l^2}{32} \right)$$

梁全体に荷重が掛かっていて ($\lambda_r = 1$)、かつ変位が小さく張力が無視できる場合 ($\kappa l \ll 1$)、

$$k_{eff} = \frac{384EI}{l^3}$$

となる。

1.3.2 実効質量

振動子の実効質量は、各方向の振動の共振周波数から計算する。

両持ち梁の共振周波数は、

$$\omega = \frac{\lambda_i^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{M}} \quad (1-5)$$

ここで、

E : ヤング率、 I : 断面 2 次モーメント (台形断面の公式²を適用)

M : 単位長さあたりの質量 (= 密度 × 断面積) L : カンチレバーの長さ

である。また、両端固定の場合、係数 λ_i は以下の方程式を満たす³。

$$\cosh(\lambda_i) \cos(\lambda_i) = 1 \quad (1-6)$$

この方程式から、1 次モードでは $\lambda_1 = 4.73$ である。

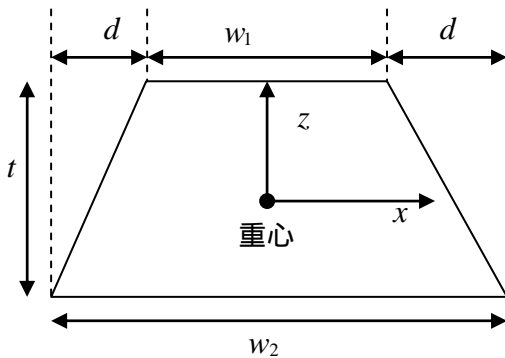
一方、等価な集中質量系の共振角周波数は、

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_{eff}}} \quad (1-7)$$

ここで、 k はバネ定数。

(1-5)と(1-7)から、実効質量は

$$m_{eff} = \frac{kL^4}{\lambda_1^4 EI} M \quad (1-8)$$



$$I_y = \frac{t^3}{36} \frac{(w_1 + w_2)^2 + 2w_1w_2}{w_1 + w_2}$$

$$I_z = \frac{t}{36(w_1 + w_2)} \left[(w_1 + w_2)^2 \{ (w_2 - w_1)^2 + 2w_1w_2 - d(w_2 - w_1) + d^2 \} + 2w_1w_2 \{ d^2 - w_1w_2 - d(w_2 - w_1) \} \right]$$

図 3 台形断面の断面 2 次モーメント

² R. J. Roark and W. G. Young, "Formulas for Stress and Strain fifth ed.", McGraw-Hill (1982).

³ D. E. Newland 著、清水信行訳『機械振動の解析と計算』オーム社 (1992) pp.413.

1.3.3 直流動作点における振動子-電極間の容量

2つの寄与に分けて、振動子-電極間の容量を見積もる^{4, 5}。

(1) 斜面間のオーバーラップ容量

(2) 上部のストリップ間の容量

斜面の重なり部分の電場は、図5に示すような斜面に垂直な円弧状であるとする。

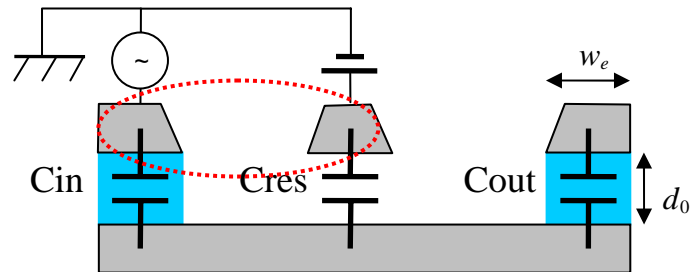


図4 振動子-基板間の容量

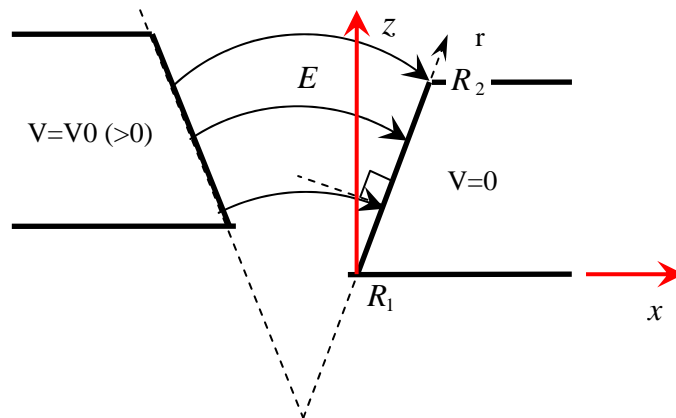


図5 円弧状の電場

⁴ K.W. Lee and A.S. Holmes, "Electrostatic actuation in electroformed Ni microstructures", at IEE Colloquium on "Microengineering, modeling and design", Savoy Place, Mar. 4, 1999.

⁵ F.E.H. Tay, X. Jun, Y.C. Liang, V.J. Logeeswaran and Y. Yufeng, "The effects of non-parallel plates in a differential capacitive microaccelerometer", *J. Micromech. Microeng.*, vol.9, pp. 283-293, 1999.

1.3.3.1 斜面の寄与 (側面に垂直な円弧状の電場を考えた容量)

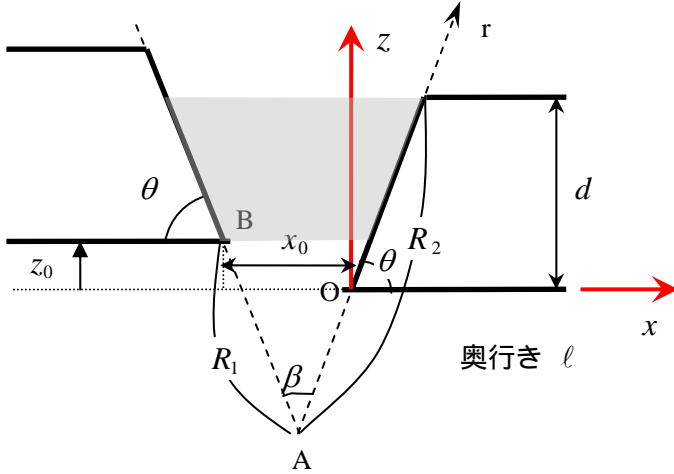


図 6 側面に垂直な円弧状の電場を考えた容量

まず、振動子が電極に対して上側に変位する場合を考える。直流動作点において、振動子はz方向に z_0 だけ変位しているとする。

このとき、直線AOの方程式は $z = (\tan \theta)x$ 、直線ABの方程式は $z = (-\tan \theta)(x + x_0) + z_0$ であるから、交点Aの座標は、

$$\left(-\frac{x_0}{2} + \frac{z_0}{2 \tan \theta}, -\frac{x_0}{2} \tan \theta + \frac{z_0}{2} \right) \quad (1-2)$$

したがって、 \sin に関して、

$$\sin \theta = \frac{z_0 - \left(-\frac{x_0}{2} \tan \theta + \frac{z_0}{2} \right)}{R_1} = \frac{d - \left(-\frac{x_0}{2} \tan \theta + \frac{z_0}{2} \right)}{R_2}$$

$$R_1 = \frac{x_0}{2 \cos \theta} + \frac{z_0}{2 \sin \theta}, \quad R_2 = \frac{x_0}{2 \cos \theta} + \frac{2d - z_0}{2 \sin \theta} \quad (1-4)$$

点Aから動径方向にr座標を取ると、位置rにある微小区間drの容量は、

$$dC = \text{誘電率} \times \frac{\text{台形側面の面積}}{\text{円弧の長さ}} = \frac{\varepsilon \ell dr}{\beta r} \quad (\ell \text{ は振動子の長さ})$$

したがって、

$$C = \int_{R_1}^{R_2} dC = \frac{\varepsilon \ell}{\beta} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right) = \frac{\varepsilon \ell}{\pi - 2\theta} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)$$

$$= \frac{\varepsilon \ell}{\pi - 2\theta} \ln \left(\frac{\frac{x_0}{2 \cos \theta} + \frac{2d - z_0}{2 \sin \theta}}{\frac{x_0}{2 \cos \theta} + \frac{z_0}{2 \sin \theta}} \right) = \frac{\varepsilon \ell}{\pi - 2\theta} \ln \left(\frac{x_0 + \frac{2d - z_0}{\tan \theta}}{x_0 + \frac{z_0}{\tan \theta}} \right) \quad (z \geq 0) \quad (1-2)$$

一方、振動子が電極に対して下側へ変位する場合は、パラメータの対応から、前節の式で $z_0 \rightarrow -z_0$ で置き換えればよいことが分かる。

以上まとめると、

$$C = \frac{\varepsilon \ell}{\pi - 2\theta} \ln \left(\frac{x_0 + \frac{2d - |z_0|}{\tan \theta}}{x_0 + \frac{|z_0|}{\tan \theta}} \right)$$

となる。ここで、直流動作点における振動子の位置を基準にした x 方向、 z 方向の変位を導入すると、

$$C_1(x, z) = \frac{\varepsilon \ell}{\pi - 2\theta} \ln \left(\frac{x_0 + x + \frac{2d - |z_0 + z|}{\tan \theta}}{x_0 + x + \frac{|z_0 + z|}{\tan \theta}} \right)$$

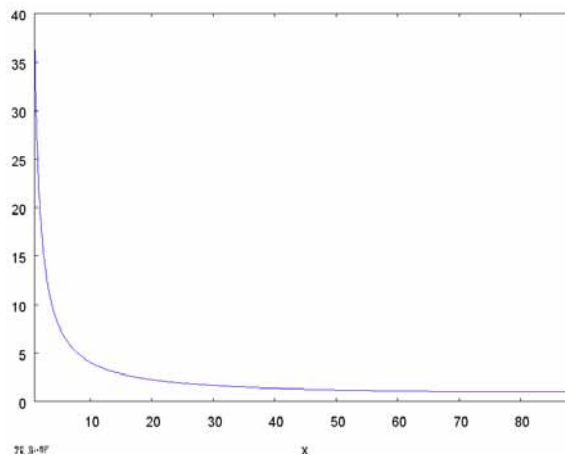
$$C_2(x, z) = \frac{\varepsilon \ell}{\pi - 2\theta} \ln \left(\frac{x_0 - x + \frac{2d - |z_0 + z|}{\tan \theta}}{x_0 - x + \frac{|z_0 + z|}{\tan \theta}} \right)$$

【参考】平行平板近似との比較

「側面に垂直な円弧状の電場を考えたとき」の容量と「平行平板近似による」容量の比は、

$$\frac{C}{C_{para}} = \frac{2}{(\pi - 2\theta)\tan \theta}$$

この比を角度 (degree) に対して plot すると、以下のようになる。角度 θ の単調減少関数であり、 $\theta < 90^\circ$ で 1 以上、つまり「側面に垂直な電場を考えたとき」の方が大きくなる。



1.3.3.2 上面の寄与 (ストリップ容量)

上面の寄与は、図 7 に示すストリップの容量の半分 (上面のみ) で評価した。

$$C = \frac{\varepsilon_0 V \ell}{\pi} \left[\ln \left\{ \left(\frac{w}{x_0} + 1 \right)^2 - 1 \right\} + \left(1 + \frac{w}{x_0} \right) \ln \left(1 + \frac{2x_0}{w} \right) \right]$$

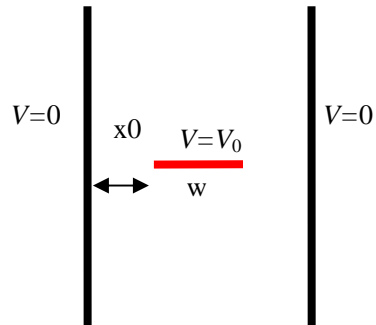


図 7 ストリップ

1.3.4 直流動作点での振動子の z 方向撓み

z 方向のたわみは、両持ち梁に次の静電引力を印加して計算する。

- (1) 台形側面に垂直に働く静電引力の垂直方向成分
- (2) 振動子下面と基板間の静電引力

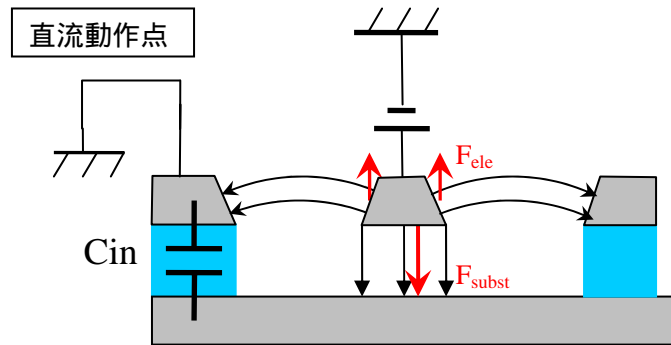


図 8 たわみ計算

1.3.4.1. 台形側面に垂直な方向に働く静電引力⁶

図 6 において、点 A から動径方向に r の位置にある微小区間 dr での表面電荷密度は、

$$\sigma = \frac{dC \times V}{\ell dr} = \frac{\epsilon V}{\beta r}$$

したがって、点 A から動径方向に r の位置における電場は、

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{V}{\beta r}$$

したがって、側面に垂直な方向に働く静電引力は

$$F_{ele} = \frac{\epsilon}{2} \int_{R_1}^{R_2} |E|^2 dr = \frac{\epsilon \ell V^2 (d - z_0)}{\beta^2 (x_0 \tan \theta + z_0)(x_0 \tan \theta + 2d - z_0)}$$

1.3.4.2. 振動子下面と基板間の静電引力

平行平板間の静電引力の式を用いる。

$$F_{subst} = \frac{\epsilon \ell V^2}{2(d_0 + z_0)^2}$$

⁶ F.E.H. Tay, X. Jun, Y.C. Liang, V.J. Logeeswaran and Y. Yufeng, "The effects of non-parallel plates in a differential capacitive microaccelerometer", *J. Micromech. Microeng.*, vol.9, pp. 283-293, 1999.

1.3.5 浮遊容量

図 9 のように、平行平板容量を並列接続したものと見なして、

$$C_{\text{stray}} = 2\epsilon_0\epsilon_r \frac{A}{t_{\text{box}}}$$

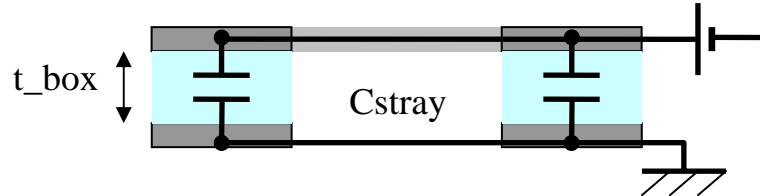


図 9 浮遊容量

1.3.6 基板-電極間の容量 / 基板-振動子間の容量

基板との容量（基板-電極、基板-振動子間容量）は、平行平板近似で求める。

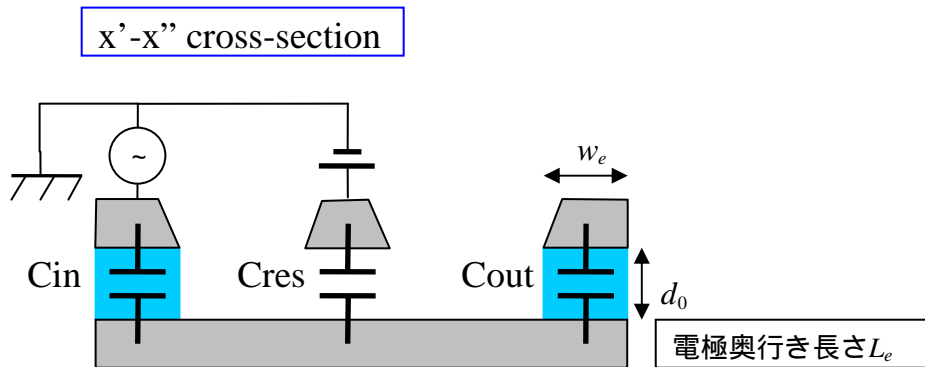


図 10 基板-電極間の容量