
カンチレバー・パラメータ抽出仕様

2008/3/10 第 1.0 版

ファイン MEMS システム化設計プラットフォーム

研究開発プロジェクト

はじめに

本文書では、MEMS 等価回路 Web ライブラリに掲載されたデバイスのうち、「カンチレバー」の等価回路の回路定数を計算する際に必要なパラメータの抽出仕様について概説する。

更新履歴表

版名	改訂日付	主要改訂内容
第 1.0 版	2008.3.10	初版

目次

1	磁気駆動カンチレバー	3
1.1	抽出対象パラメータ	3
1.2	パラメータ抽出方法	4
1.2.1	バネ定数	4
1.2.2	実効質量	4
1.2.3	直流動作点でのたわみ	5
1.2.4	自己インダクタンス	5
1.2.5	コイル部の電気抵抗	8
2	CNT カンチレバー（静電駆動カンチレバー）	9
2.1	抽出対象パラメータ	9
2.2	パラメータ抽出仕様	10
2.2.1	バネ定数	10
2.2.2	実効質量	10
2.2.3	直流動作点における容量	11

1 磁気駆動カンチレバー

本節では、磁気駆動カンチレバーのパラメータ抽出仕様について概説する。

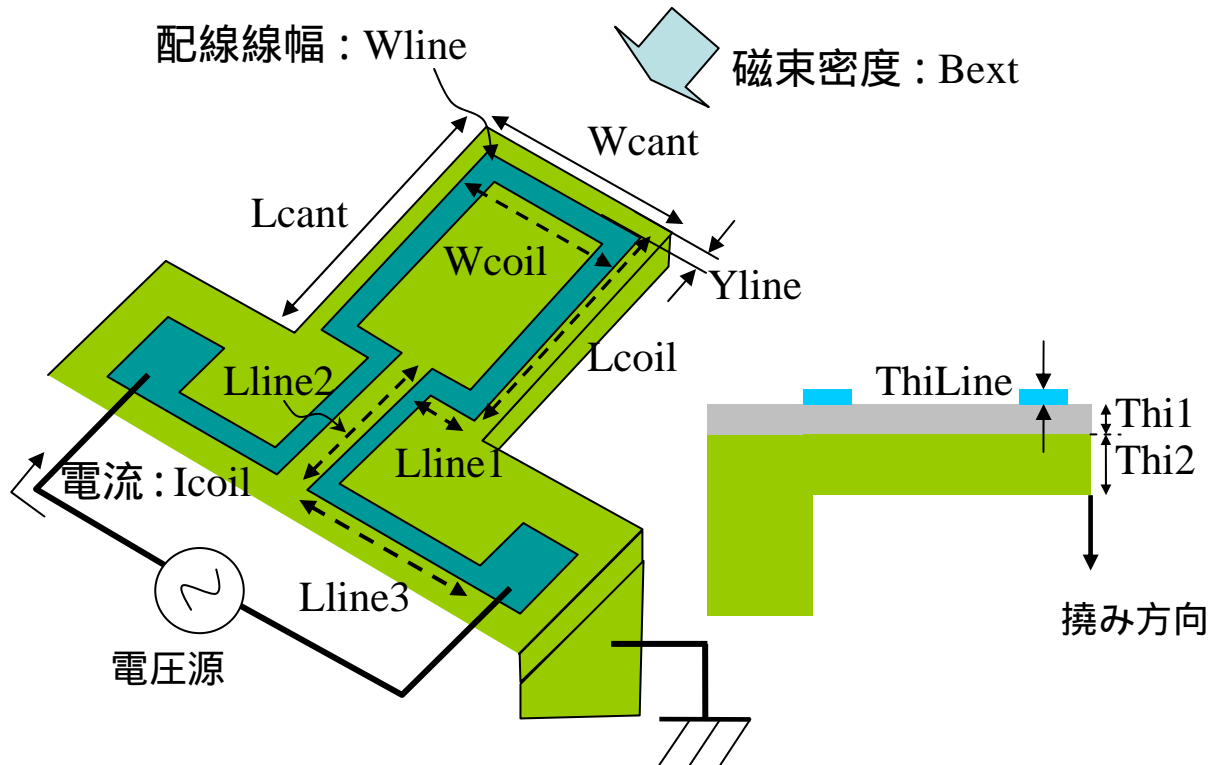


図 1 磁気駆動カンチレバー

1.1 抽出対象パラメータ

パラメータ名	記号	単位
バネ定数	kSpringX	N/m
実効質量	mass	kg
直流動作点におけるたわみ	Xc	m
自己インダクタンス	Lc	H
コイル部の電気抵抗	Rc	

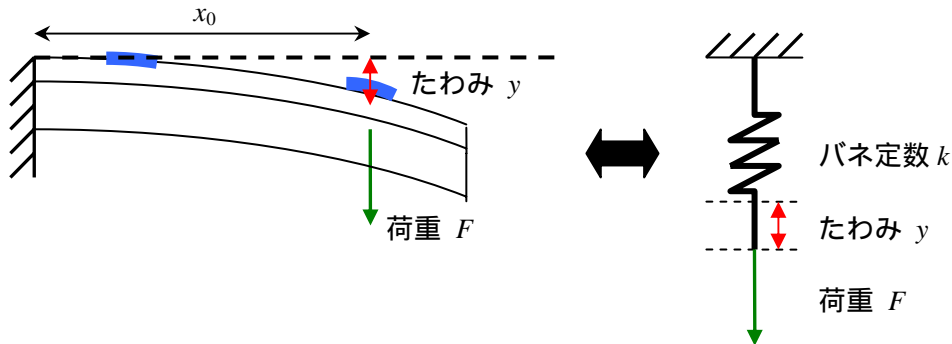
1.2 パラメータ抽出方法

1.2.1 バネ定数

磁場に垂直な配線の位置（根元から距離 x_0 ）に作用する点荷重とたわみの関係から、バネ定数 k を求める。組合せ梁のバネ定数の解析式は、

$$k = \frac{3 \sum_m E_m I_m}{x_0^3} \quad (E_m \text{ は層 } m \text{ のヤング率、} I_m \text{ は中立軸に関する断面 2 次モーメント})$$

から求める。



1.2.2 実効質量

カンチレバーは分布質量系である為、共振周波数から有効質量を計算する。

カンチレバーの 1 次モードの共振角周波数は、

$$\omega = \lambda_1^2 \sqrt{\frac{\sum_m E_m I_m}{l^3 m}} \quad (1-1)$$

ここで、 $\lambda_1 = 1.875$ 、 E_m は層 m のヤング率、 I_m は中立軸に関する断面 2 次モーメント、 m はカンチレバーの質量（= 密度 × カンチレバーの体積）、 l はカンチレバーの長さである。

一方、等価な集中質量系の共振角周波数は、

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_{eff}}} \quad (1-2)$$

と表される。式(4-4-1)と(4-4-2)から、有効質量は、

$$m_{eff} = \frac{kl^3}{\lambda_1^4 \sum_m E_m I_m} m \quad (1-3)$$

ここで、1.2.2.節で与えたバネ定数の表式を用いると、

$$m_{eff} = \frac{3(l/x_0)^3}{\lambda_1^4} m \quad (1-4)$$

1.2.3 直流動作点でのたわみ

図 2 右に、カンチレバー部に作用するローレンツ力を示す。 F_1 は線分 ab 及び ef に働くローレンツ力の総計、 F_2 は線分 cd に働くローレンツ力である。カンチレバー部を、2 層の組合せ梁とみなして、ローレンツ力 F_1 と F_2 によるたわみを計算した。

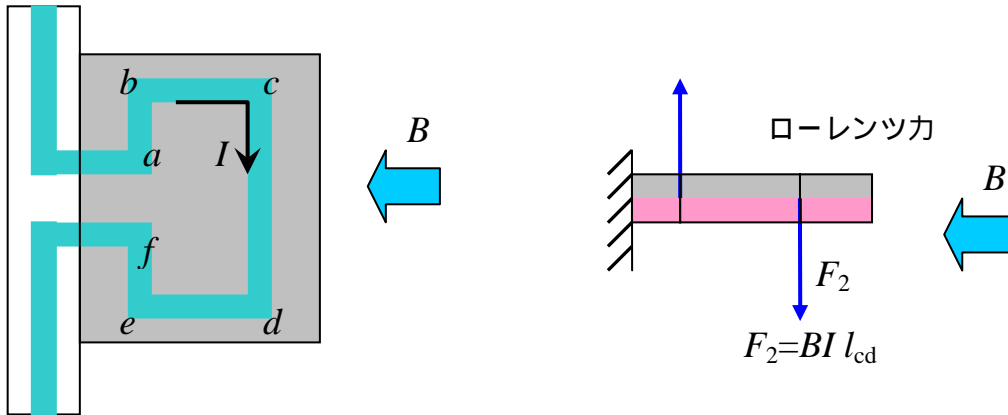


図 2 たわみの計算

1.2.4 自己インダクタンス

ループ配線を 1 回巻きの長方形コイルとみなして導出した自己インダクタンスの式を用いる。

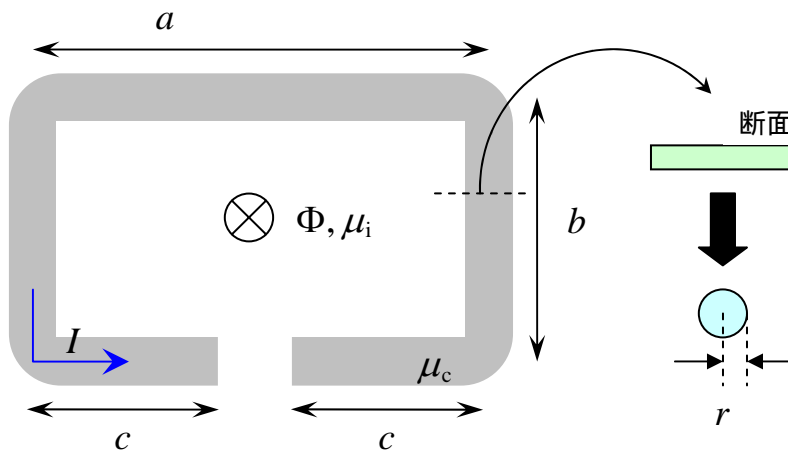


図 3 ループ配線

仮定

- コイルの断面は半径 r の円形である。半径 r は、長方形断面と同じ断面積を有する円の半径を用いる。
- 半径 r は、コイルの縦、横の長さに比べて十分小さい ($r \ll (a, b)$)。
- 電流を流したとき、電流分布は断面で一様である。
- 図 3 に示したループ配線部以外の配線部の寄与を無視する。

自己インダクタンスの表式

以上の仮定のもとで求めた自己インダクタンスの表式を示す。尚、導出過程はこの後の補遺を参照下さい。

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi}(a+b) + \frac{\mu_0}{\pi} \left[(a+b) \left\{ \ln \frac{2ab}{r} - 2 \right\} - a \log(a+c) - b \log(b+c) + 2c + \Delta\phi \right] \quad (1-5)$$

ここで、 $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ は対角線の長さ、 $\Delta\phi$ は、ループ配線の下辺の一部が欠けていることによるインダクタンスの減少量である。第1項は導線内部にできる磁束を考えた場合の寄与、第2項は導線外部の磁束で磁力線がコイル面を切るものを考えた場合の寄与である。尚、一部金属(鉄、コバルト、ニッケルなど)を除く多くの物質で比透磁率がほぼ1であるため、透磁率には真空透磁率 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ [H/m] を用いることとする。

【補遺：式(1-5)の導出】

コイルの自己インダクタンス L は、(1)コイルに電流を流したとき導線内部にできる磁束を考えた場合の寄与 L_i と、(2)導線外部の磁束で磁力線がコイル面を切るものを考えた場合の寄与 L_e の和になる。

$$L = L_i + L_e$$

以下で、各項を順に求める。

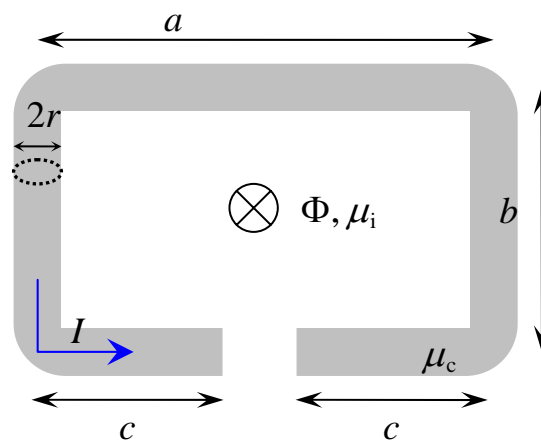


図4 ループ配線

(1) 導線内部にできる磁束を考えた場合の自己インダクタンス

中心軸から R 離れた点での磁束密度は、

$$B(R) = \frac{\mu_c \times \frac{R^2}{r^2} I}{2\pi R} = \frac{\mu_c I}{2\pi r^2} R$$

ここで、 μ_c は導線の透磁率である。

これより、一辺、例えば長さ b の導線内部に生じる磁場エネルギーは、

$$W = \frac{1}{2} \int \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dV = \frac{1}{2\mu_c} \int_0^r \left(\frac{\mu_c I}{2\pi r^2} R \right)^2 2\pi R b dR = \frac{\mu_c b}{16\pi} I^2$$

一方、磁場エネルギーは、インダクタンス L_i^b を用いて、 $W = (1/2)L_i^b I^2$ とも表せる。故に、長さ b に導線内部に生じる磁束だけを考えたときの自己インダクタンスは、

$$L_i^b = \frac{\mu_c b}{8\pi}$$

他の辺でも同様にすると、導線内部にできる磁束を考えた場合の自己インダクタンスは、

$$L_i = \frac{\mu_c b}{8\pi} \times 2 + \frac{\mu_c a}{8\pi} \times 2 = \frac{\mu_c}{4\pi} (a + b)$$

(2) コイルの内側を貫く磁束を考えた場合の自己インダクタンス

「導線の半径は、コイルの縦、横の長さに比べて十分小さい」という仮定より、コイルの内側を貫く磁束は、導線の中心線を電流 I が流れているとみなして計算する。

一辺、例えば、長さ b の導線のなす磁場は、図 5 を参照して、

$$\begin{aligned} B(x, y) &= \frac{\mu_i I}{4\pi} \int \frac{\sin \theta}{r^2} ds = \frac{\mu_i I}{4\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\sin^3 \theta}{x^2} \frac{x}{\sin^2 \theta} d\theta = \frac{\mu_i I}{4\pi x} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \\ &= \frac{\mu_i I}{4\pi x} \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{b - y}{\sqrt{x^2 + (b - y)^2}} \right) \end{aligned}$$

これがコイルの内側を貫く磁束は、

$$\begin{aligned} \Phi_b &= \int_r^{a-r} dx \int_r^{b-r} dy B(x, y) \\ &= \frac{\mu_i I}{2\pi} \left[\sqrt{(a-r)^2 + (b-r)^2} - (b-r) \ln \frac{b-r + \sqrt{(a-r)^2 + (b-r)^2}}{a-r} \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{(b-r)^2 + r^2} - \sqrt{(a-r)^2 + r^2} + (b-r) \ln \frac{b-r + \sqrt{r^2 + (b-r)^2}}{r} \right. \\ &\quad \left. + r \left[\sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2}) + \ln \frac{r + \sqrt{(a-r)^2 + r^2}}{a-r} \right] \right] \\ &\approx \frac{\mu_i I}{2\pi} \left[\sqrt{a^2 + b^2} - b \ln \frac{b + \sqrt{a^2 + b^2}}{a} - a - b + b \ln \frac{2b}{r} \right] \end{aligned}$$

尚、最終行で、 $r \ll b$ を用いた (r の 1 次項は落とした)。相対する辺も同じ磁束を与える。また、長さ a の辺の寄与は、 Φ_b の表式で a と b を交換したもので、長さ x の辺の寄与も同様に議論できる。

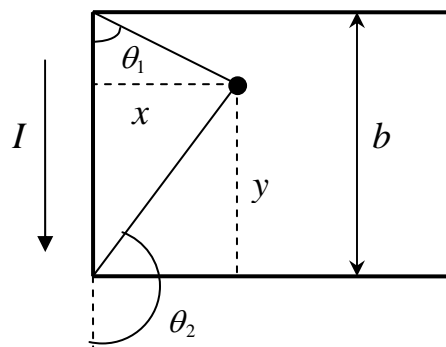


図 5 長さ b の導線のなす磁場の計算

したがって、コイルの内側を貫く全磁束は、

$$\Phi = \frac{\mu_i I}{\pi} \left[(a+b) \left\{ \ln \frac{2ab}{r} - 2 \right\} - a \log(a+c) - b \log(b+c) + 2c + \Delta\phi \right]$$

となる。ここで、 $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ 、 $\Delta\phi$ はループ配線の下辺の一部が欠けていることによる減少量であり、 $\xi \equiv a - x - r$ を用いて、以下のように書ける。

$$\Delta\phi = \frac{1}{2} \left[\sqrt{b^2 + x^2} - \sqrt{b^2 + \xi^2} + \xi \ln \frac{\sqrt{b^2 + \xi^2} + \xi}{b} - x \ln \frac{\sqrt{b^2 + x^2} + x}{b} \right. \\ \left. \sqrt{r^2 + \xi^2} - x + x \ln \frac{2x}{r} - \xi \ln \frac{\sqrt{r^2 + \xi^2} + \xi}{r} \right]$$

故に、自己インダクタンスは、

$$L_e = \frac{\mu_i}{\pi} \left[(a+b) \left\{ \ln \frac{2ab}{r} - 2 \right\} - a \log(a+c) - b \log(b+c) + 2c + \Delta\phi \right]$$

1.2.5 コイル部の電気抵抗

仮定

1. 電極パッド部分の寄与を無視できる。
2. コイル部分の断面は一様である。

電気抵抗の計算式

ρ を配線の体積抵抗率、 L をコイル全長、 S をコイルの断面積とすると、

$$R = \rho \frac{L}{S}$$

2 CNT カンチレバー（静電駆動カンチレバー）

本節では、CNT カンチレバー（静電駆動カンチレバー）のパラメータ抽出仕様について概説する。

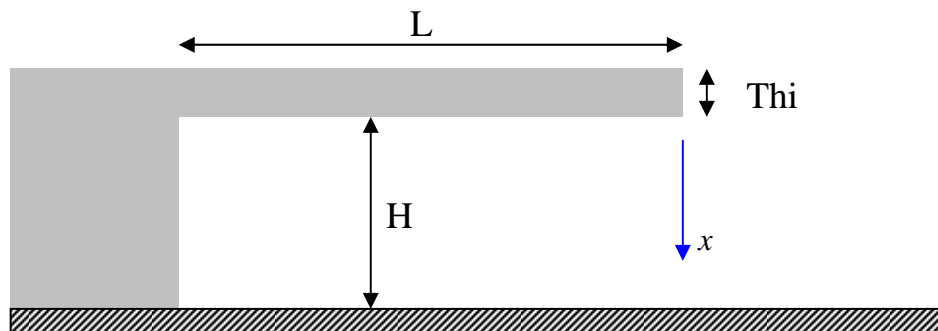


図 6 カンチレバー（静電駆動）

2.1 抽出対象パラメータ

パラメータ名	記号
バネ定数	kSpringX
実効質量	mass
直流動作点におけるカンチレバー-基板間容量	C0
直流動作点におけるカンチレバー-基板間容量の 1 階微係数	C0dx
直流動作点におけるカンチレバー-基板間容量の 2 階微係数	C0dx2

2.2 パラメータ抽出仕様

2.2.1 バネ定数

バネ定数は、一様分布荷重下の片持ち梁の先端変位の表式から求める。

$$\delta = \frac{f_e L^4}{8EI} \quad (2-1)$$

$$\therefore k = \frac{f_e L}{\delta} = \frac{8EI}{L^3} \quad (2-2)$$

ここで、 E はヤング率、 I は断面 2 次モーメントである。

2.2.2 実効質量

実効質量は、片持ち梁の共振周波数とバネ定数から求まる以下の式で計算する。

$$m_{eff} = \frac{8}{\lambda_1^4} m \quad (2-3)$$

ここで、 $\lambda_1=1.875$ 、 m はカンチレバーの質量 (= 密度 × カンチレバーの体積) である。

【式(3-2-1)の導出】

カンチレバーの 1 次モードの共振角周波数は、

$$\omega = \lambda_1^2 \sqrt{\frac{EI}{L^3 m}} \quad (2-4)$$

ここで、 $\lambda_1=1.875$ 、 E はヤング率、 I は断面 2 次モーメント、 m はカンチレバーの質量 (= 密度 × カンチレバーの体積)。

一方、等価な集中質量系の共振角周波数は、

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_{eff}}} \quad (2-5)$$

と表される。式(3-2-2)と(3-2-3)から、有効質量は、

$$m_{eff} = \frac{kL^3}{\lambda_1^4 EI} m \quad (2-6)$$

ここで、式(2-2)を用いると、

$$m_{eff} = \frac{8}{\lambda_1^4} m$$

2.2.3 直流動作点における容量

直流動作点における容量の計算は、以下の手順で行っている。

【1. 撓み量の計算】

- [1] 図 7 左のように、片持ち梁と基板の重なり部分を等間隔で 4 つの部分 (セグメント 1~4) に分割する。
- [2] 各セグメントの撓み曲線を図 7 右に示す方法で線形近似する。また、電気力線は鉛直方向と角 $c_1/2$ をなしているとする¹。
- [3] 各部分で単位長さあたりの容量を計算し、その変位に関する微分から単位長さあたりの静電引力を求める。
- [4] [3]で求めた単位長さあたりの力を梁に加え、梁の撓み量を計算する。この計算は、上記[2]~[4]の反復によって数値的に行われる。

【2. 容量の計算】

- [1] 上記で得られた撓み量から、各セグメントの近似直線の方程式を決める。
- [2] 電気力線方向の梁-基板間距離 $g(x)$ を用いて、各セグメントの容量を求める。
- [3] 全 4 セグメントの容量を足し合わせる。

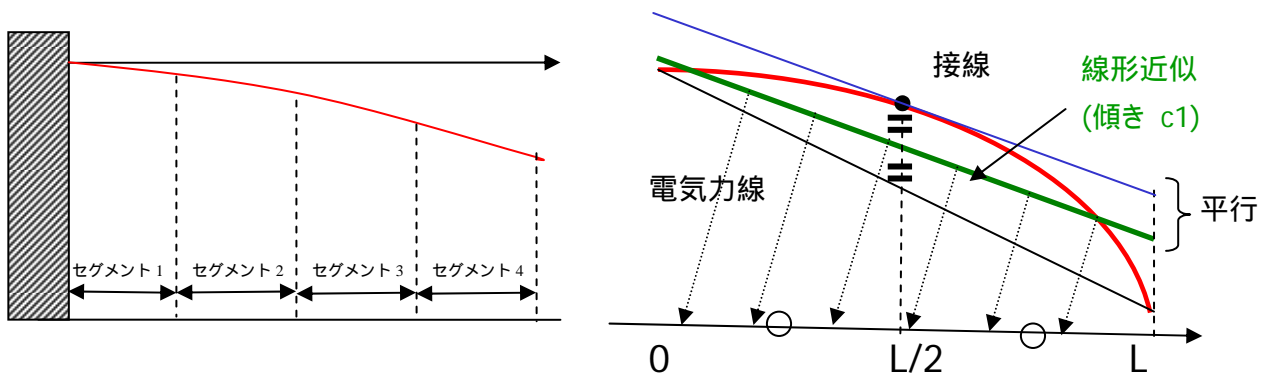


図 7 回転平行平板近似

¹ G. Wong, G. Tse, Q. Jing, T. Mukherjee and G. Fedder, Accuracy and composability in NODAS, in Proceedings of the 2003 IEEE/ACM Int. Workshop on Behavioral Modeling and Simulation (BMAS '03), pp. 82 - 87, October 7-8, 2003, San Jose, California.