MEMS等価回路の導出方法について

ファインＭＥＭＳシステム化設計プラットフォーム研究開発プロジェクト[1]

平成 21 年 5 月 28 日

[1]監修：財団法人マイクロマシンセンター

目 次

第1章　MEMS等価回路の導出法

等価回路を導出する際には、MEMS をまず数式でモデル化し、その数式に対して適当な変換を行って電気回路素子とのアナロジーを導き出すという手順が必要である。ここでは、MEMS のような異なる物理系を統一的に扱うのに適しているエネルギー関数によるモデル化と、それを用いた等価回路の導出法の概要を述べることにする。

1.1　外力無しモデル

外力なしモデルは、MEMS デバイスに加速度等の外力が加わっていない場合における電気回路側からみたイミタンスとして表現したものあり、電気回路への接続端子だけを有し、他機械系への接続をすることはできない。MEMS デバイスの機械構造パラメータは、電気回路素子のパラメータ計算に含まれる。本モデルは、デバイス固有の等価回路として拡張性、汎用性に欠けるが、MEMS デバイスの特性を回路から容易に理解でき、回路設計者にとってはその後の回路設計に対して見通しのよい表現となっている。このモデルの導出過程を図 1.1 に示す。

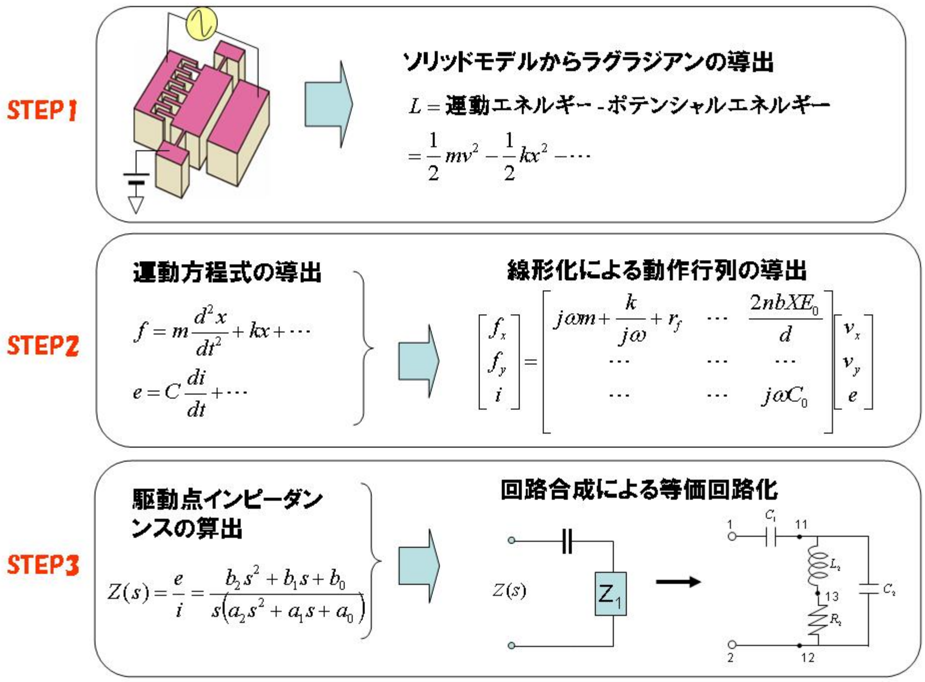

図 1.1: 外力なしモデルの導出過程

STEP1 まずモデル化する MEMS をエネルギー関数であるラグラジアンで表す。ラグラジアンは系の運動エネルギーからポテンシャルエネルギーを引いた関数である。このとき、考慮する機械系の自由度に

合わせたエネルギー表現を行う。機械系のパラメータは、集中定数として与えられるものとして表現する。また、エネルギーの消費を表す散逸関数も合わせて導出する。

STEP2 STEP1 で得られたラグラジアンより考慮する系の数だけ運動方程式を導出する。これは、ラグラジアンをラグランジュ方程式に代入して微分を実行するだけで簡単に得られる。このとき散逸関数もラグランジュ方程式に代入される。次に得られた運動方程式を直流バイアス点のまわりでテイラー展開し、その 1 次項だけ採用して線形化する。これにより、モデル化する MEMS の線形動作行列が得られる。

STEP3 得られた線形動作行列の機械系外力を零として、印加交流電圧と交流電流の比である駆動点インピーダンスをまず導出する。駆動点インピーダンスは、複素数 s を変数とする有理関数である。等価回路は、この駆動点インピーダンスを回路合成の手法により生成する。回路合成は、駆動点インピーダンスの極を次々に分離していくことにより行われる。極の複素関数上の位置により、LCR 回路が一意的に決定される。これによりモデル化する MEMS の等価回路が得られる。

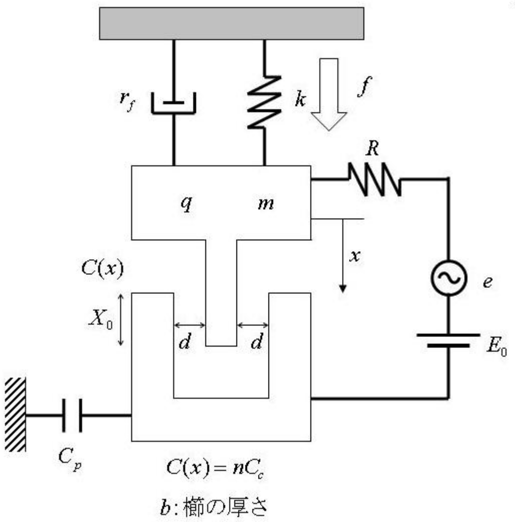

図 1.2: 外力なしモデルの導出過程

例として図 1.2 に示すような櫛歯アクチュエータを取り上げる。パラメータ表を参考に、櫛歯アクチュエータに直流バイアスと交流電圧が同時に印加され、アクチュエータが振動している場合のラグラジアンを書くと、

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}k\left(X + x\right)^2 - \frac{\left(Q + q\right)^2}{C(x) + C_p} \tag{1.1}$$

一方、アクチュエータのエネルギー損失を表す散逸関数は、

$$F = \frac{1}{2}r_f v^2 + \frac{1}{2}Ri^2 \tag{1.2}$$

これらを用いて、考慮している自由度の数だけラグランジュ方程式を立てる。機械系 1 自由度、電気系 1 自由度の場合は、

表 1.1: パラメータ表

パラメータ	物理量
f	櫛歯アクチュエータに加わる外力
m	実効質量
k	バネ定数
r_f	機械抵抗
X_0	櫛歯間重なり（バイアス・外力なし）
X	直流バイアスによる静的変位
x	微小交流変位
d	櫛歯間ギャップ
b	構造の厚さ
n	櫛歯の数

パラメータ	物理量
e	交流電圧
E_0	直流バイアス
$C(x)$	櫛歯間容量
C_p	電極等の寄生容量
Q	直流バイアスによる電荷量
q	交流的に変化する微小電荷量
i	櫛歯間に流れる交流電流

$$\begin{aligned} f &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \\ E_0 + e &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \end{aligned} \tag{1.3}$$

この偏微分を実行し、さらに得られた式をテイラー展開してその一次項のみをとれば線形の運動方程式が得られる。この運動方程式をフェーザで表現し電気系の式を電流の式として整理しなおせば、電気機械変換係数が直流電圧の関数として表せるようになる。このようにして得られた運動方程式を行列の形で表せば、

$$\begin{bmatrix} f \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_f + j\omega m + \frac{k}{j\omega} & -\frac{2n\epsilon_0 b}{d}E_0 \\ \frac{2n\epsilon_0 b}{d}E_0 & j\omega\left(C_0 + C_p\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ e \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

次に式 (1.4) において $f = 0$ とおき、電圧 e と電流 i の比を計算する。このとき $j\omega = s$ とおいたものが駆動点インピーダンスである。計算を実行すれば、

$$Z(s) = \frac{ms^2 + r_f s + k}{s\left(mBs^2 + r_f Bs + A^2 + kB\right)} \tag{1.5}$$

ここで $A = 2n\epsilon_0 bE_0/d$、$B = C_0 + C_p$ とおいている。
この式を複素数 s の関数とみたて、回路合成の手法に従って極や零点の分離を繰り返すと、LCR 素子で表された等価回路が得られる。図 1.3 に得られた等価回路を示す。

このように外力なしモデルは、LCR 素子による等価回路表現になり、MEMS の共振特性や応答特性などが直感的に理解できるようになる。

1.2 外力接続モデル

設計プラットフォームの汎用性を高めるためには、任意のデバイス形状に対して等価回路を出力できるようにする必要がある。そこで電気端子の他に、機械端子を有する回路モデルの導出法について述べる。機械端子は自由度に応じた数だけ有しており、当該自由度のどの方向に対しても機械構造の追加、外力の入力が

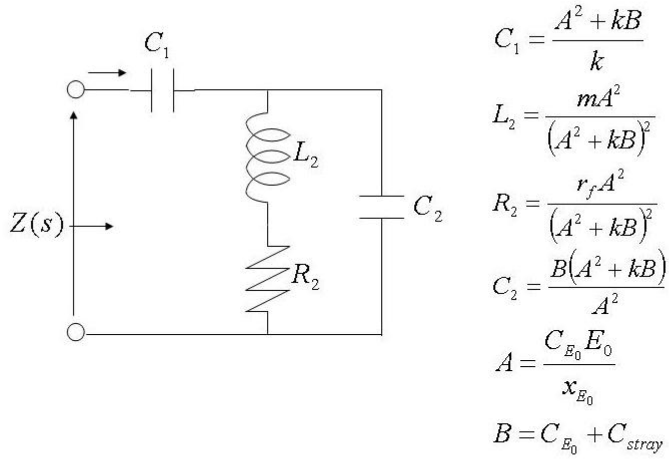

図 1.3: 外力なしモデルによる櫛歯アクチュエータの等価回路と回路定数と構造パラメータの関係式

可能となった設計となっている。ここでは、電気機械エネルギー変換系を有する MEMS デバイスの外力有り接続モデルの導出法と、各自由度における機械回路の合成法について述べる。まず、MEMS デバイスのモデル化については、図 1.1 の STEP2 までは同じである。外力有り接続モデルは、線形化動作行列を各物理系と相互変換部分に分けることにより構成される。式 (1.4) の場合は以下のように分離する。

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} r_f + j\omega m + \frac{k}{j\omega} & -\frac{2n\epsilon_0 b}{d} E_0 \\ \frac{2n\epsilon_0 b}{d} E_0 & j\omega (C_0 + C_p) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} r_f + j\omega m + \frac{k}{j\omega} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2n\epsilon_0 b}{d} E_0 \\ \frac{2n\epsilon_0 b}{d} E_0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & j\omega (C_0 + C_p) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{1.6}$$

第１項は機械項のみ、第３項は電気項のみの項である。また第２項は機械系と電気系の相互作用項を表している。これらを電気回路にすると、相互作用項は従属電源素子として表現され、機械項は、質量をインダクタ、バネ定数の逆数をコンデンサ、機械抵抗を電気抵抗で置き換えられる。電気回路行列はアドミッタンス行列となっているので、並列回路で表現される。結局機械系 1 自由度の櫛歯アクチュエータ外力モデルは図 1.4 のようになる。

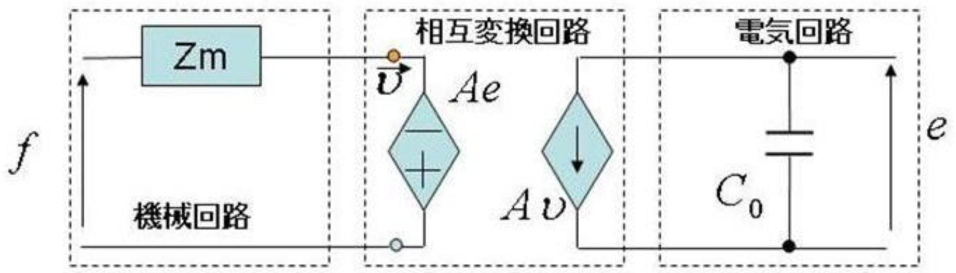

図 1.4: 外力なしモデルによる櫛歯アクチュエータの等価回路と回路定数と構造パラメータの関係式

このように本プラットフォームでは、機械系の力を電圧、速度を電流として扱っている。[1]

[1]機械系において力を電圧と対応づける表現以外にも、力を電流と対応づけて表現することも当然可能である。この関係は互いに双対であるから、どちらの表現を利用しても、同じ特性を表す等価回路を導出することができる。機械回路の合成においても双対関係を利用して、お互い変換が可能である。

多自由度の機械系を扱う場合も、同様の方法手法で回路化できる。櫛歯アクチュエータに対する 2 自由度モデルを図 1.5 に示す。

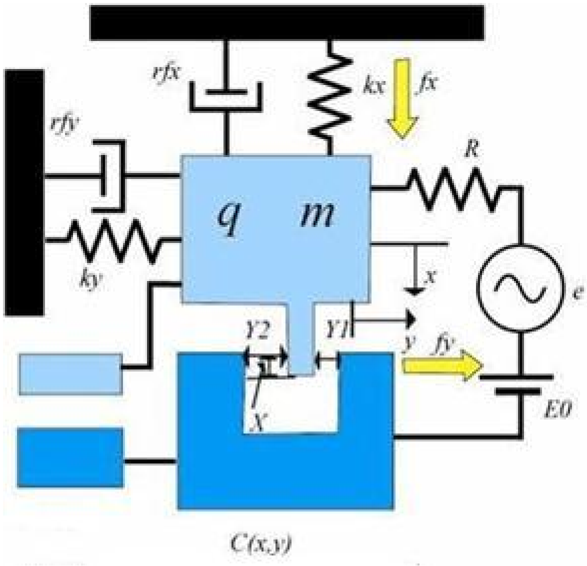

図 1.5: 櫛歯アクチュエータの機械系 2 自由度モデル

機械系自由度は、対向する櫛歯電極がお互い引き込む方向を x 方向、隣り合う櫛歯構造に変位する方向を y 方向としている。このときのラグラジアンは、

$$L = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 - \frac{1}{2}k_x x^2 - \frac{1}{2}k_y y^2 - \frac{(Q+q)^2}{2\left(C(x,y)+C_p\right)} \tag{1.7}$$

ここで、添え字の x、y はそれぞれ x 方向の構造パラメータ、y 方向の構造パラメータを表している。また櫛歯のキャパシタンスは、両方向への変位の関数となり、単なる平行平板近似では

$$C(x,y) = n\epsilon_0 b\left(X_0+X+x\right)\left(\frac{1}{Y_1-Y-y}+\frac{1}{Y_2+Y+y}\right) \tag{1.8}$$

と書ける。これらの式から、機械系 1 自由度と同様に線形化し等価回路にすると図 1.6 のようになる。ここで C_0 は直流バイアスを印加したときの櫛歯間キャパシタンス容量である。また説明のために櫛歯間のコンデンサは単純な平行平板近似としたが、本プラットフォームではフリンジ容量を考慮して算出している。

以上のように、機械系の自由度に応じてラグラジアンを定義して運動方程式をたて、それを線形化することで等価回路を導出することができる。ただし本プラットフォームの現在のバージョンでは、能動素子としては櫛歯アクチュエータのみを 3 自由度表現し、他のカンチレバーや平行平板などのデバイスでは、1 自由度表現を採用している。

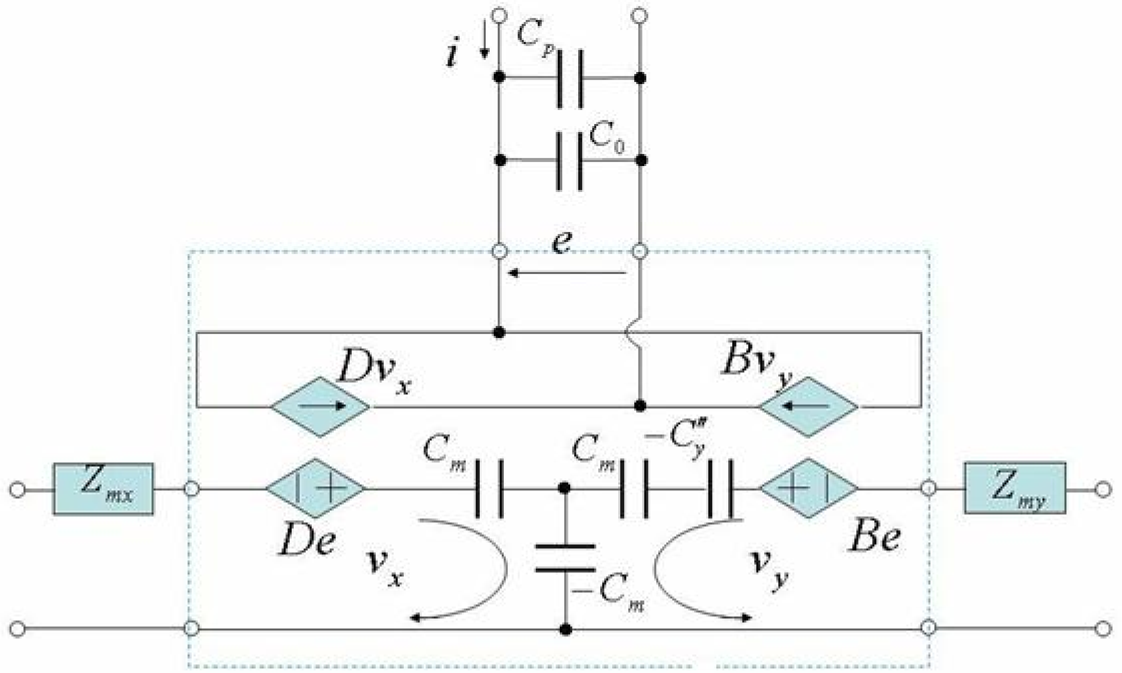

図 1.6: 櫛歯アクチュエータの機械系 2 自由度モデル